# Lógica Matemática

# 08

## *Lógica proposicional: Validade de Argumentos*▪

# Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br

## Argumento

DEFINIÇÃO 1: Uma forma argumentativa (ou simplesmente argumento) é uma sequência finita de fórmulas da lógica proposicional, sendo que a última dessas fórmulas é chamada de conclusão e as restantes são chamadas de premissas.

Exemplo:

$$p, (p \rightarrow q); \therefore q.$$

O que nós gostaríamos é que, quando atribuímos valores verdade Às variáveis proposicionais envolvidas, sempre que as premissas assumirem o valor V, a conclusão também assuma o valor V.

# Argumento válido e inválido

DEFINIÇÃO 2: Sejam $A_1, A_2, \ldots A_n$ e $A$ fórmulas da lógica proposicional. Dizemos que um argumento $A_1, A_2, \ldots, A_n;\ \therefore A$ é *inválido* se é possível atribuirmos valores verdade às variáveis proposicionais envolvidas de tal maneira que cada uma das premissas assumam o valor V e a conclusão assuma o valor F.

Caso contrário, dizemos que o argumento é *válido*.

Exemplo: vamos investigar a validade do seguinte argumento:

$$(p \to q), (\neg q \to r), r;\ \therefore p$$

Atribuímos valores às variáveis proposicionais envolvidas

| $(p$ | $\rightarrow$ | $q)$ | $((\neg$ | $q)$ | $\rightarrow$ | $r)$ | $r$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | | V | | V | | V | V | V |
| V | | V | | V | | F | F | V |
| V | | F | | F | | V | V | V |
| V | | F | | F | | F | F | V |
| F | | V | | V | | V | V | F |
| F | | V | | V | | F | F | F |
| F | | F | | F | | V | V | F |
| F | | F | | F | | F | F | F |

Calculamos os valores verdade das premissas:

| $(p$ | $\rightarrow$ | $q)$ | $((\neg$ | $q)$ | $\rightarrow$ | $r)$ | $r$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | **V** | V | F | V | V | V | V | V |
| V | **V** | V | F | V | V | F | F | V |
| V | **F** | F | V | F | V | V | V | V |
| V | **F** | F | V | F | F | F | F | V |
| F | **V** | V | F | V | V | V | V | F |
| F | **V** | V | F | V | V | F | F | F |
| F | **V** | F | V | F | V | V | V | F |
| F | **V** | F | V | F | F | F | F | F |

Verificamos quais atribuições fazem as premissas assumirem V:

| $(p$ | $\rightarrow$ | $q)$ | $((\neg$ | $q)$ | $\rightarrow$ | $r)$ | $r$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | **V** | V | F | V | V | V | V | V |
| V | **V** | V | F | V | V | F | F | V |
| V | **F** | F | V | F | V | V | V | V |
| V | **F** | F | V | F | F | F | F | V |
| F | **V** | V | F | V | V | V | V | F |
| F | **V** | V | F | V | V | F | F | F |
| F | **V** | F | V | F | V | V | V | F |
| F | **V** | F | V | F | F | F | F | F |

Conclusão: o argumento é inválido.

| $(p$ | $\rightarrow$ | $q)$ | $((\neg$ | $q)$ | $\rightarrow$ | $r)$ | $r$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | **V** | V | F | V | V | V | V | V |
| V | **V** | V | F | V | V | F | F | V |
| V | **F** | F | V | F | V | V | V | V |
| V | **F** | F | V | F | F | F | F | V |
| F | **V** | V | F | V | V | V | V | F |
| F | **V** | V | F | V | V | F | F | F |
| F | **V** | F | V | F | V | V | V | F |
| F | **V** | F | V | F | F | F | F | F |

Outro exemplo: $p$, $(p \rightarrow q)$; $\therefore q$

| $(p$ | $\rightarrow$ | $q)$ | $p$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | **V** | V | V | V |
| V | **F** | F | V | F |
| F | **V** | V | F | V |
| F | **V** | F | F | F |

Outro exemplo: $p$, $(p \rightarrow q)$; $\therefore q$

| $(\boldsymbol{p}$ | $\rightarrow$ | $\boldsymbol{q})$ | $\boldsymbol{p}$ | $\boldsymbol{q}$ |
|---|---|---|---|---|
| V | **V** | V | V | V |
| V | **F** | F | V | F |
| F | **V** | V | F | V |
| F | **V** | F | F | F |

Conclusão: o argumento é válido.

# Argumento válido e implicação lógica

RESULTADO: O argumento $A_1, A_2, \ldots, A_n;\ \therefore A$ é válido se, e somente se, a fórmula $\big((A_1 \ \& \ A_2 \ \& \ \ldots \& \ A_n) \rightarrow A\big)$ é uma tautologia.

*Demonstração (IDA):*

Suponha que o argumento $A_1, A_2, \ldots, A_n;\ \therefore A$ é válido.

Se a fórmula $\big((A_1 \ \& \ A_2 \ \& \ \ldots \& \ A_n) \rightarrow A\big)$ não é uma tautologia, então existe uma atribuição de valores tal que $(A_1 \ \& \ A_2 \ \& \ \ldots \& \ A_n)$ assume o valor V (isso implica que cada $A_i$, por sua vez, assume o valor V) e $A$ assume o valor F.

Mas isto contradiz a validade do argumento $A_1, A_2, \ldots, A_n;\ \therefore A$ .

Portanto, $\big((A_1 \ \& \ A_2 \ \& \ \ldots \& \ A_n) \rightarrow A\big)$ deve ser uma tautologia.

# Argumento válido e implicação lógica

RESULTADO: O argumento $A_1, A_2, \dots, A_n;\ \therefore A$ é válido se, e somente se, a fórmula $\left((A_1 \ \& \ A_2 \ \& \ \dots \& \ A_n) \rightarrow A\right)$ é uma tautologia.

*Demonstração (VOLTA):*

Suponha que á fórmula $\left((A_1 \ \& \ A_2 \ \& \ \dots \& \ A_n) \rightarrow A\right)$ é uma tautologia.

Se o argumento $A_1, A_2, \dots, A_n;\ \therefore A$ não é válido, existe uma atribuição de valores de tal modo que que cada $A_i$ assume o valor V e $A$ assume o valor F.

Mas, desta forma, esta atribuição torna a fórmula $\left((A_1 \ \& \ A_2 \ \& \ \dots \& \ A_n) \rightarrow A\right)$ falsa, o que contradiz o fato de ela ser uma tautologia.

Portanto, o argumento $A_1, A_2, \dots, A_n;\ \therefore A$ deve ser válido. ■

# Observação final: *Reductio ad absurdum*

Uma prova por redução ao absurdo consiste em deduzir uma contradição a partir da negação da sentença $T$ que desejamos provar:

$A_1, A_2, \dots, A_n, \neg T; \therefore A$ , em que $A$ é uma contradição.

Se nosso argumento $A_1, A_2, \dots, A_n, \neg T; \therefore A$ é uma instância de um argumento válido, então pelo resultado anterior, $\left(A_1 \;\&\; \dots \& A_n \;\&\; (\neg T)\right) \rightarrow A$ é uma tautologia.

Agora, se a sua conclusão é falsa, então uma das premissas deve ser falsa para que mantenhamos a tautologia.

Como assumimos que $A_1, A_2, \dots, A_n$ são verdadeiras, concluímos que $(\neg T)$ é falsa, o que é equivalente a dizer que $\left(\neg(\neg T)\right)$ é verdadeira.

# Lógica Matemática

## 08 *Lógica proposicional: Validade de Argumentos*■

numeroimaginario.com.br
vinicius@numeroimaginario.com.br